



TITLE:

# 層化抽出法に基づく母平均の信頼区間の構成について

AUTHOR(S):

佐井, 至道

---

CITATION:

佐井, 至道. 層化抽出法に基づく母平均の信頼区間の構成について. 数理解析研究所講究録 1995, 916: 29-39

ISSUE DATE:

1995-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/59639>

RIGHT:

## 層化抽出法に基づく母平均の信頼区間の構成について

岡山商科大学 佐井至道 (Shido Sai)

### 1 はじめに

一変量の分布を持つ母集団から層化無作為抽出された標本に基づく母平均の推定については、既に様々な角度から議論が行われてきた。しかし、母平均の信頼区間の構成については、これまでほとんど議論されていない。

本報告では、層化抽出された標本から、母平均の信頼区間を構成する方法について考えていく。まず、単純無作為抽出の場合と同様に  $t$  分布を用いて構成する方法と、それが可能となる条件について 2 節で考える。3 節では、モンテカルロシミュレーションによって、理論的には統計量が  $t$  分布に従う裏付けがなくても、実際に  $t$  分布を近似的に利用しても特に問題ない状況があるかどうか検討する。そして 4 節では、 $t$  分布を利用して信頼区間を構成するのが不可能な場合に、これに代わる方法としてブートストラップ法による信頼区間の構成法について考える。また、この節ではシミュレーションも行い、 $t$  分布を利用する方法とブートストラップ法を利用する方法との比較を行う。

### 2 母平均の信頼区間の構成

#### 2.1 単純無作為抽出法に基づく信頼区間の構成

一変量の正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  ( $\mu, \sigma^2$ : 未知) をもつ母集団から、大きさ  $n$  の標本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  が単純無作為抽出される場合、標本平均と標本分散を

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j, \quad (1)$$

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2, \quad (2)$$

と定義すると、

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1), \quad (3)$$

$$V^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \quad (4)$$

となり、しかも  $U$  と  $V^2$  は独立であるから、統計量

$$\begin{aligned} T &= \frac{\sqrt{n-1}U}{V} \\ &= \frac{\sqrt{n-1}(\bar{X} - \mu)}{S} \end{aligned} \quad (5)$$

は自由度  $n-1$  の  $t$  分布に従う. この  $t$  分布の上側確率  $\frac{\alpha}{2}$  に対する点を  $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$  とすると, 信頼度  $1-\alpha$  の母平均  $\mu$  の信頼区間は

$$\left[ \bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}} S, \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}} S \right] \quad (6)$$

と求められる.

## 2.2 層化無作為抽出法に基づく信頼区間の構成

この節では, 層化無作為抽出された標本に対して, 前節と同様に信頼区間の構成法を考えていく.

母集団  $F_0$  が一変量の正規分布をもつ  $L$  個の層に分けられると仮定する. 第  $i$  層の重み (母集団全体に対する第  $i$  層の比率), 平均, 分散を  $w_i, \mu_i, \sigma_i^2$  と表し, 第  $i$  層から大きさ  $n_i$  の標本  $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i}$  が他の層とは独立に無作為抽出されるものとする. ただし,

$$\sum_{i=1}^L w_i = 1, \quad \sum_{i=1}^L n_i = n$$

であり,  $w_i$  ( $i = 1, 2, \dots, L$ ) は既知であるが,  $\mu_i, \sigma_i^2$  ( $i = 1, 2, \dots, L$ ) は未知とする. このような状況では, 母平均  $\mu$  の推定には, 次のような不偏推定量を用いるのが一般的である.

$$\bar{X}_{st} = \sum_{i=1}^L w_i \bar{X}_i \quad (7)$$

ただし

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \quad (8)$$

である. ここで, "st" は層化無作為抽出法 (stratified random sampling) を意味している. この推定量について

$$\bar{X}_{st} \sim N\left(\mu, \sum_{i=1}^L \frac{w_i^2}{n_i} \sigma_i^2\right) \quad (9)$$

となることは容易に求められる.

そこで, (3), (4) にならって同様の統計量  $U_{st}, V_{st}^2$  を次のように定義するのが自然であろう.

$$U_{st} = \frac{\bar{X}_{st} - \mu}{\sqrt{\sum_{i=1}^L \frac{w_i^2}{n_i} \sigma_i^2}}, \quad (10)$$

$$V_{st}^2 = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^L \frac{w_i^2}{n_i} S_i^2}{\sum_{i=1}^L \frac{w_i^2}{n_i} \sigma_i^2}. \quad (11)$$

ただし

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 \quad (12)$$

である。

(9) より  $U_{st} \sim N(0,1)$  となり, また明らかに  $U_{st}$  と  $V_{st}^2$  は独立であるから, もし  $V_{st}^2$  が  $\chi^2$  分布に従うならば  $t$  統計量を構成することができる。

$\chi^2$  分布の再生性より

$$\sum_{i=1}^L \frac{n_i S_i^2}{\sigma_i^2} \sim \chi^2(n-L) \quad (13)$$

が得られるが, これを利用するためには (11) で

$$\sum_{i=1}^L \frac{w_i^2}{n_i} S_i^2 = \sum_{i=1}^L \frac{w_i^2 \sigma_i^2}{n_i^2} \cdot \frac{n_i S_i^2}{\sigma_i^2}$$

となるから, 層にかかわらず  $w_i^2 \sigma_i^2 / n_i^2$  が一定とならねばならない。このような  $n_i$  を求めると

$$n_i = \frac{w_i \sigma_i}{\sum_{k=1}^L w_k \sigma_k} n \quad (14)$$

となり, これは Neyman 配分法 (母平均を推定する場合の最適配分法) である。また逆に Neyman 配分法を用いると

$$V_{st}^2 = \sum_{i=1}^L \frac{n_i S_i^2}{\sigma_i^2} \quad (15)$$

となり, 統計量

$$\begin{aligned} T_{st} &= \frac{\sqrt{n-L} U_{st}}{V_{st}} \\ &= \sqrt{\frac{n-L}{n}} \cdot \frac{\bar{X}_{st} - \mu}{\sqrt{\sum_{i=1}^L \frac{w_i^2}{n_i} S_i^2}} \end{aligned} \quad (16)$$

は自由度  $n-L$  の  $t$  分布に従う。(6) と同様に  $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$  を定めると, 信頼度  $1-\alpha$  の母平均  $\mu$  の信頼区間  $I$  は

$$I = \left[ \bar{X}_{st} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{n}{n-L}} \sqrt{\sum_{i=1}^L \frac{w_i^2}{n_i} S_i^2}, \bar{X}_{st} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{n}{n-L}} \sqrt{\sum_{i=1}^L \frac{w_i^2}{n_i} S_i^2} \right] \quad (17)$$

と求められる。

各層が正規分布に従う場合, 母集団全体は正規分布に従わないため, 上式を (6) と単純には比較できないが, それを無視すると, 区間の幅は2つの推定量の標準誤差  $SD(\bar{X}_{st})$  と  $SD(\bar{X})$  にほぼ比例する。例えば正規分布を左右対称に2層に層別した場合,  $SD(\bar{X}_{st})/SD(\bar{X}) = 0.6028$  である。

### 3 シミュレーションによる信頼区間の検討

#### 3.1 モンテカルロシミュレーションの設計

前節で述べた通り, Neyman 配分法を用いると母平均の信頼区間を構成することが可能であるが, 各層の標本の大きさ  $n_i$  を決定するためには, 層内分散  $\sigma_i^2$  が既知または推定可能

でなければならない。そのため一般の調査では、比例配分法 ( $n_i = w_i n$ ) などのパラメータの推定を必要としない配分法を用いることが多い。しかしその場合、(11) の  $V_{st}^2$  は  $\chi^2$  分布に従わず、 $T_{st}$  も  $t$  分布に従わなくなる。また仮に Neyman 配分法を用いても、各層が正規分布に従わなければ  $T_{st}$  は  $t$  分布に従わない。このような場合には前節の議論には頼れなくなるが、もし統計量  $T_{st}$  の分布が比較的  $t$  分布に近ければ、信頼区間  $I$  を近似的に用いても特に問題がないと思われる。

そこでこの節では、種々の分布と層別法に対して、いくつかの配分法を用いて層化抽出を行った場合の、統計量  $T_{st}$  の分布と母平均の真の信頼区間をモンテカルロシミュレーションによって求めていく。

まず、分布と層別法は次の場合を考える。なお層の数はすべて 2 である。

- (A) 正規分布の区間層別 (標準正規分布を区間層別して 2 つの層に分割する。その際、 $w_1 = 0.5, 0.6, \dots, 0.9$  となるような層別点を用いる。)
- (B) 2 つの標準正規分布 (2 つの標準正規分布を層と考える。各正規分布の全体に対する比率を  $w_1, w_2$  とし、 $w_1 = 0.5, 0.6, \dots, 0.9$  と変化させる。)
- (C) 2 つの正規分布 (2 つの正規分布を層と考え、 $w_1 = w_2 = 0.5$ ,  $\sigma_1 = 1.0$  と固定し、 $\sigma_2 = 1.0, 2.0, \dots, 5.0$  と変化させる。)
- (D) 一様分布 ((A) と同様の区間層別を行う。)
- (E) 両側三角分布 ((A) と同様の区間層別を行う。)
- (F) 右側三角分布 ((A) と同様の区間層別を行う。ただし、非対称分布のため  $w_1 = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$  となるような層別点を用いる。)

次に配分法としては、

- (a) Neyman 配分法
- (b) 比例配分法
- (c) 等配分法 ( $n_1 = n_2 = \frac{n}{2}$ )
- (d) 逆比例配分法 ( $n_1 = w_2 n$ ,  $n_2 = w_1 n$ )

の 4 通りを考える。逆比例配分法という名称は存在しないが、ここではいわば不適当な配分法の代表として加えた。

また 2 層から抽出する標本の大きさの合計  $n$  としては 20, 50, 122 の 3 通りを考える。

### 3.2 被覆確率と被覆誤差

各層が正規分布に従い、かつ Neyman 配分法を用いる場合を除いては、信頼区間には  $T_{st}$  の真の分布から  $P\{|T_{st}| \leq v_{1-\frac{\alpha}{2}}\} = 1 - \alpha$  となる点  $v_{1-\frac{\alpha}{2}}$  を計算し、用いなければならない。

い. そのため,  $t$  分布から求めた値  $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$  を用いて構成した (17) は一般には正しい信頼区間とならないので, ここで信頼区間  $I$  を, Neyman 配分法の場合も含めて  $\hat{I}$  とおき直す.

前節のすべての組合せに対して, シミュレーションによって  $T_{st}$  の値を繰り返し計算し, その分布を推定するが, 最終的な目標となるものは信頼区間の被覆確率と被覆誤差である. 被覆確率は, 信頼度  $1 - \alpha$  の信頼区間  $\hat{I}$  を構成した際に, 実際にその信頼区間に母平均  $\mu$  が含まれる確率  $P\{\mu \in \hat{I}\}$  と定義する. また被覆誤差を  $P\{\mu \in \hat{I}\} - (1 - \alpha)$  と定める.

表 1 に "(A) 正規分布の区間層別" の信頼度 95% と 99% の信頼区間の被覆誤差を示す. なお, 繰り返しの回数は  $n = 20, 50, 122$  に対してそれぞれ 500000 回, 200000 回, 100000 回である.

分布が左右対称であるため,  $w_1 = 0.5$  のときにはすべての配分法は等しくなり, しかもこれが最適層別となる.

Neyman 配分法を用いたときには, どちらかの層から抽出する標本が極端に小さい場合を除いて被覆誤差はほとんどなく, 層が正規分布に従わないことによる影響はあまり見られない. 他の分布 (B)~(F) についても同様の結果が得られるが, (B), (C) では誤差は更に小さく, 逆に (F) の右側三角分布ではやや大きい. これらは各層の分布の正規分布への近似の度合によるものと思われる.

比例配分法の被覆誤差も全体的に小さく Neyman 配分法と比較しても見劣りせず, 信頼区間  $\hat{I}$  を用いてもほとんど問題はないと考えられる. 他の分布でも誤差は小さいが, (C) で  $\sigma_2$  の値が大きい場合には比較的大きい. 例えば,  $n = 20, \sigma_2 = 5.0$  のとき, 信頼度 95%, 99% の信頼区間の被覆誤差はそれぞれ -0.0133, -0.0071 である. これは, 各層の標本の大きさが Neyman 配分法から大きくずれることによるものである. また (F) でも  $n$  が小さい場合には誤差が大きく, これらの場合には  $t$  分布を利用するのは問題である.

等配分法と逆比例配分法では, ともに  $w_1$  が大きくなるにつれて誤差は大きくなるが,  $n = 122$  では等配分法の誤差はかなり小さい. しかし逆比例配分法では誤差は依然として大きく, 何かしら別の方法が要求される.

## 4 ブートストラップ法による母平均の信頼区間の構成

### 4.1 ブートストラップ信頼区間の構成手順

前節でみたように, 通常用いられているような標本配分法では, 標本があまり小さくない限り信頼区間  $\hat{I}$  を用いても問題ないことがわかった. しかし既に標本が不適切な配分法で抽出されてしまった場合には, 他の手法を考える必要がある.

一つの候補として, 抽出された値のうちいくつかを削除することによって調整し, 全体として Neyman 配分法に近づける方法が考えられるが, 標本がかなり小さくなり信頼区間の幅が大きくなってしまう可能性がある. そこでこの節では, ブートストラップ法を用いて信頼区間を構成する方法を考える. その手順は次の通りである.

表 1:  $t$  分布を用いた信頼区間の被覆誤差 (正規分布の区間層別,  $L = 2$ )

(a) Neyman 配分法

	$w_1$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$n = 20$	$n_1 : n_2$	10:10	13:7	15:5	17:3	19:1
	95%	0.0012	0.0006	-0.0014	-0.0023	-0.0025
	99%	0.0008	0.0002	-0.0015	-0.0022	-0.0023
$n = 50$	$n_1 : n_2$	25:25	32:18	38:12	43:7	47:3
	95%	0.0001	0.0005	-0.0008	-0.0004	-0.0001
	99%	0.0002	0.0001	-0.0003	-0.0008	-0.0006
$n = 122$	$n_1 : n_2$	61:61	78:44	93:29	106:16	116:6
	95%	-0.0005	0.0001	-0.0002	-0.0008	-0.0007
	99%	0.0004	0.0002	-0.0005	0.0001	-0.0005

(b) 比例配分法

	$w_1$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$n = 20$	$n_1 : n_2$	10:10	12:8	14:6	16:4	18:2
	95%	0.0012	-0.0003	-0.0024	-0.0020	0.0007
	99%	0.0008	-0.0002	-0.0023	-0.0027	-0.0009
$n = 50$	$n_1 : n_2$	25:25	30:20	35:15	40:10	45:5
	95%	0.0001	-0.0002	-0.0018	-0.0007	0.0009
	99%	0.0002	-0.0001	-0.0014	-0.0009	-0.0005
$n = 122$	$n_1 : n_2$	61:61	73:49	85:37	98:24	110:12
	95%	-0.0005	0.0000	-0.0004	-0.0009	0.0005
	99%	0.0004	0.0004	-0.0005	-0.0004	-0.0007

(c) 等配分法

	$w_1$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$n = 20$	$n_1 : n_2$	10:10	10:10	10:10	10:10	10:10
	95%	0.0012	-0.0069	-0.0172	-0.0213	-0.0192
	99%	0.0008	-0.0041	-0.0113	-0.0143	-0.0123
$n = 50$	$n_1 : n_2$	25:25	25:25	25:25	25:25	25:25
	95%	0.0001	-0.0031	-0.0070	-0.0076	-0.0079
	99%	0.0002	-0.0022	-0.0051	-0.0059	-0.0049
$n = 122$	$n_1 : n_2$	61:61	61:61	61:61	61:61	61:61
	95%	-0.0005	-0.0009	-0.0034	-0.0026	-0.0023
	99%	0.0004	-0.0008	-0.0019	-0.0021	-0.0020

## (d) 逆比例配分法

	$w_1$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$n = 20$	$n_1 : n_2$	10:10	8:12	6:14	4:16	2:18
	95%	0.0012	-0.0196	-0.0563	-0.1129	-0.3204
	99%	0.0008	-0.0111	-0.0375	-0.0828	-0.2787
$n = 50$	$n_1 : n_2$	25:25	20:30	15:35	10:40	5:45
	95%	0.0001	-0.0092	-0.0222	-0.0418	-0.0959
	99%	0.0002	-0.0051	-0.0148	-0.0271	-0.0693
$n = 122$	$n_1 : n_2$	61:61	49:73	37:85	24:98	12:110
	95%	-0.0005	-0.0035	-0.0088	-0.0152	-0.0343
	99%	0.0004	-0.0016	-0.0058	-0.0092	-0.0222

1° 2.2節と同様に、母集団  $F_0$  から標本が層化無作為抽出されたものとするが、第  $i$  層から抽出された大きさ  $n_i$  の標本の観測値を  $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i}$  とする。これらの標本点に同じ確率を持たせた標本全体を経験分布  $F_1$  とする。

2° 経験分布  $F_1$  で1°と同じ層別を考え、第  $i$  層の  $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i}$  から大きさ  $n_i$  の標本  $X_{i1}^*, X_{i2}^*, \dots, X_{in_i}^*$  を無作為に復元抽出する。このとき、(16)と同様にブートストラップ統計量  $T_{st}^*$  を次のように定義する。

$$T_{st}^* = \sqrt{\frac{n-L}{n}} \cdot \frac{\bar{X}_{st}^* - \bar{x}_{st}}{\sqrt{\sum_{i=1}^L \frac{w_i^2}{n_i} S_i^{*2}}} \quad (18)$$

ただし

$$\bar{x}_{st} = \sum_{i=1}^L w_i \bar{x}_i \quad (\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}), \quad (19)$$

$$\bar{X}_{st}^* = \sum_{i=1}^L w_i \bar{X}_i^* \quad (\bar{X}_i^* = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^*), \quad (20)$$

$$S_i^{*2} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij}^* - \bar{X}_i^*)^2 \quad (21)$$

である。

3° ステップ2°を  $B$  回繰り返し、計算された  $T_{st}^*$  の値を  $t_{st_b}^*$  ( $b = 1, 2, \dots, B$ ) とする。この値の絶対値の小さい順に並べたものを  $|t_{st(1)}^*|, |t_{st(2)}^*|, \dots, |t_{st(B)}^*|$  とする。

4° 整数  $k$  を  $k/B = 1 - \alpha$  を満たす値またはその近似値とすると、 $\hat{v}_{1-\frac{\alpha}{2}} = |t_{st(k)}^*|$  とおく。この値を用いて次のように信頼区間  $\hat{I}^*$  を構成する。

$$\hat{I}^* = \left[ \bar{x}_{st} - \hat{v}_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{n}{n-L}} \sqrt{\sum_{i=1}^L \frac{w_i^2}{n_i} s_i^2}, \bar{x}_{st} + \hat{v}_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{n}{n-L}} \sqrt{\sum_{i=1}^L \frac{w_i^2}{n_i} s_i^2} \right] \quad (22)$$



ただし,

$$s_i^2 = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \quad (23)$$

である.

この信頼区間においてブートストラップ法で求めるのは  $\hat{v}_{1-\frac{\alpha}{2}}$  のみで, その他はすべて標本から計算することになる.

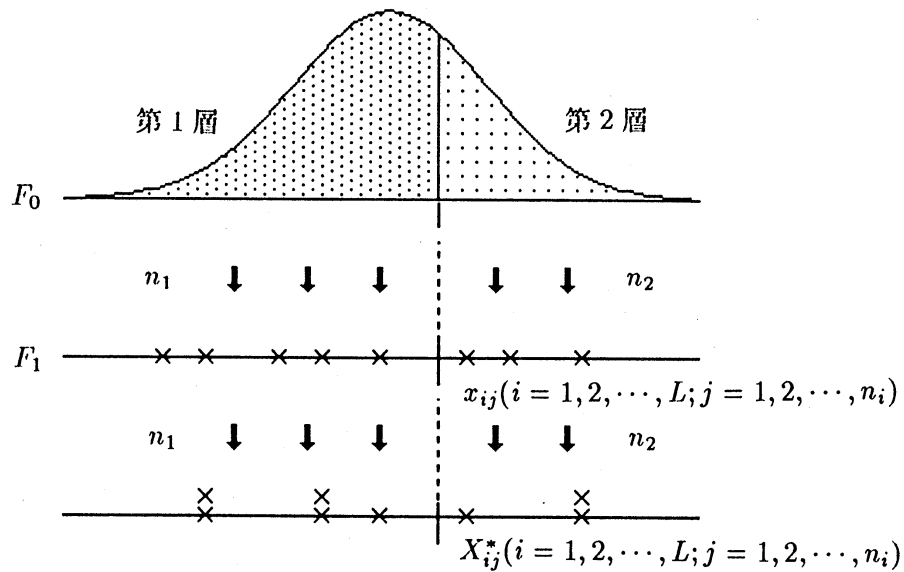


図 1: 層化抽出法に対するブートストラップ法 ( $L=2$  の場合)

#### 4.2 シミュレーションによるブートストラップ信頼区間の検討

3.1節で考えた分布, 層別法, 標本配分法, 標本の大きさの組合せに対して, 前節のブートストラップ法の手順で信頼区間  $\hat{I}^*$  を求める. この全体の手順を 200 回繰り返し, 被覆確率と被覆誤差を求める. しかし, シミュレーションの結果を安定させるためには, 場合によっては手順を相当な回数繰り返さなければならず, 200 回では不十分である. そのためここでは, (22) ではなく (17) において  $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$  を  $\hat{v}_{1-\frac{\alpha}{2}}$  で置き換えた信頼区間の被覆誤差を求め, その 200 回にわたる平均並びに絶対値の平均を求める. すなわち, 求められた  $\hat{v}_{1-\frac{\alpha}{2}}$  を用いて信頼区間 (17) を構成した場合の被覆確率の真の確率からのずれの平均を求めることになる. なお信頼区間の構成に用いる  $T_{st}^*$  の個数  $B$  は 5000 とする.

表 2: ブートストラップ信頼区間の被覆誤差の絶対値の平均 (正規分布の区間層別,  $L = 2$ )

## (a) Neyman 配分法

	$w_1$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$n = 20$	$n_1 : n_2$	10:10	13:7	15:5	17:3	19:1
	95%	0.0081	0.0088	0.0070	0.0054	0.0056
	99%	0.0038	0.0039	0.0032	0.0027	0.0026
$n = 50$	$n_1 : n_2$	25:25	32:18	38:12	43:7	47:3
	95%	0.0030	0.0030	0.0027	0.0026	0.0032
	99%	0.0016	0.0015	0.0014	0.0014	0.0013
$n = 122$	$n_1 : n_2$	61:61	78:44	93:29	106:16	116:6
	95%	0.0025	0.0026	0.0026	0.0023	0.0024
	99%	0.0012	0.0012	0.0010	0.0012	0.0012

## (b) 比例配分法

	$w_1$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$n = 20$	$n_1 : n_2$	10:10	12:8	14:6	16:4	18:2
	95%	0.0081	0.0081	0.0061	0.0049	0.0043
	99%	0.0038	0.0035	0.0028	0.0024	0.0024
$n = 50$	$n_1 : n_2$	25:25	30:20	35:15	40:10	45:5
	95%	0.0030	0.0030	0.0029	0.0030	0.0028
	99%	0.0016	0.0017	0.0017	0.0016	0.0013
$n = 122$	$n_1 : n_2$	61:61	73:49	85:37	98:24	110:12
	95%	0.0025	0.0026	0.0022	0.0025	0.0023
	99%	0.0012	0.0012	0.0011	0.0012	0.0013

## (c) 等配分法

	$w_1$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$n = 20$	$n_1 : n_2$	10:10	10:10	10:10	10:10	10:10
	95%	0.0081	0.0086	0.0086	0.0095	0.0090
	99%	0.0038	0.0038	0.0041	0.0040	0.0040
$n = 50$	$n_1 : n_2$	25:25	25:25	25:25	25:25	25:25
	95%	0.0030	0.0037	0.0045	0.0036	0.0032
	99%	0.0016	0.0020	0.0023	0.0021	0.0018
$n = 122$	$n_1 : n_2$	61:61	61:61	61:61	61:61	61:61
	95%	0.0025	0.0027	0.0027	0.0026	0.0024
	99%	0.0012	0.0013	0.0014	0.0013	0.0012

## (d) 逆比例配分法

	$w_1$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$n = 20$	$n_1 : n_2$	10:10	8:12	6:14	4:16	2:18
	95%	0.0081	0.0129	0.0171	0.0332	0.0527
	99%	0.0038	0.0053	0.0074	0.0095	0.0244
$n = 50$	$n_1 : n_2$	25:25	20:30	15:35	10:40	5:45
	95%	0.0030	0.0050	0.0065	0.0095	0.0278
	99%	0.0016	0.0026	0.0032	0.0041	0.0083
$n = 122$	$n_1 : n_2$	61:61	49:73	37:85	24:98	12:110
	95%	0.0025	0.0029	0.0033	0.0040	0.0071
	99%	0.0012	0.0015	0.0020	0.0022	0.0032

表 2 に "(A) 正規分布の区間層別" の信頼度 95% と 99% のブートストラップ信頼区間の被覆誤差の絶対値の平均を示す。(22) を用いて求めた被覆誤差はこの表の結果より小さくなることが予想されるものの、表の値はどれも比較的大きい。

Neyman 配分法と比例配分法では、 $\hat{I}$  を用いた場合の表 1 の値より小さいものはほとんどない。他の分布 (B)~(F) についても同様の結果が得られる。ただし、比例配分法について  $\hat{I}$  の被覆誤差が大きかった (C) や (F) の特殊なケースでは、表 2 の誤差の方が小さいものもある。

等配分法や逆比例配分法では、Neyman 配分法から大きくずれる場合には、ブートストラップ法を用いる効果が認められる。ただし、逆比例配分法では  $\hat{I}^*$  の被覆誤差も大きくなることが予想され、その利用はためらわれる。

## 5 おわりに

本報告では、層化無作為標本に基づく信頼区間の 2 通りの構成方法を考えた。一つの方法は、単純無作為標本に基づく信頼区間の構成と同様に  $t$  分布を利用するものであり、もう一つの方法はブートストラップ法を利用する方法である。どちらの方法についても、モンテカルロシミュレーションによってその有効性について検討した。それをまとめると次のようになる。

- Neyman 配分法で抽出された標本に対しては、 $t$  分布を用いた信頼区間  $\hat{I}$  の有効性は理論的にもシミュレーションによっても示される。また各層が正規分布に従わないことによる影響は、仮に標本が小さくてもほとんどない。
- 比例配分法では  $\hat{I}$  の構成は理論的には裏付けられないが、シミュレーションによれば Neyman 配分法から大きくずれない限り (各層の分散が大きく違わない限り) 特に問題はない。大きくずれる場合にはブートストラップ信頼区間  $\hat{I}^*$  を用いればよい。
- 等配分法のように Neyman 配分法から比較的ずれが大きい場合にも、標本が大きければ (2 層の場合には 100 程度)、 $\hat{I}$  を用いてもよい。標本が小さい場合にはブートスト

ラップ法を用いることになるが, 極端に小さい場合 (2 層の合計が 20 程度) には多少問題がある.

- 逆比例配分法のように不適当な配分法では,  $\hat{I}$  は利用できない. 標本が十分大きければ (2 層の場合には 100 程度)  $\hat{I}^*$  を利用できるが, そうでなければどちらの手法にも頼れない.

#### 参考文献

- Bickel, P. J. and Freedman, D. A. (1984), Asymptotic normality and the bootstrap in stratified sampling, *Ann. Statist.*, **12**, 2, 470-482.
- Efron, B. (1982), *The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans*, SIAM, Philadelphia.
- 小西貞則 (1990), ブートストラップ法と信頼区間の構成, 応用統計学 19 巻, 137-162.
- Sai, S. and Taguri, M. (1989), Optimum stratification based on a concomitant variable and its application to the current statistics of commerce, *Rep. Stat. Appl. Res., JUSE*, **36**, 1, 22-31.
- 柴田義貞 (1981), 正規分布 - 特性と応用 -, 東京大学出版会.
- 汪金芳・大内俊二・景平・田栗正章 (1992), ブートストラップ法 - 最近までの発展と今後の展望 -, 行動計量学 19 巻 2 号, 50-81.